

Varianta 77

SUBIECTUL I

- a) $AB = 5\sqrt{2}$
- b) $a = 3, b = -15$
- c) $S_{ABC} = 5$.
- d) Punctul M este mijlocul segmentului (AC) $\Rightarrow M\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$.
- e) $\cos^2 45^\circ = \frac{1}{2}$.
- f) $\bar{z} = -2i - 1$.

SUBIECTUL II

1.

- a) $1! + 2! + 3! + 4! = 33$.
- b) $(f \circ f)(1) = 7$.
- c) $p = \frac{1}{4}$.

d) $C_5^3 = 10$.

e) $x = 1$.

2.

a) $f(1) = e^2$.

b) $f'(x) = 2e^{2x}$.

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2e^2$.

d) $\int_0^1 f(x) dx = \frac{e^2 - 1}{2}$.

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{1}{2}$.

SUBIECTUL III

a) $\det(A) = -1 - 0 = -1$.

b) $A^2 = I_2$.

c) $I_2 + A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $I_2 + A = 2B$, unde $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^n = B, \forall n \geq 1 \Rightarrow (I_2 + A)^n = 2^n B = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

e) $I_2 + A + A^2 + \dots + A^{2007} = I_2 + A + I_2 + A + \dots + I_2 + A =$
 $= 1004(I_2 + A) = \begin{pmatrix} 2008 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(I_2 + A + A^2 + A^{2007}) = 0$.

f) Dacă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ atunci ecuația $AX = XA$ devine: $\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix}$

De unde avem că $b = 0$ și $c = 0 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ (A) pentru $d := b$

g) $X^2 = 2A \Rightarrow X^3 = X^2 \cdot X = 2AX$ și $X^3 = X \cdot X^2 = 2XA$, deci $AX = XA$. Din **f)**

rezultă $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$. Rezultă că $X^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix}$. Atunci :

$a^2 = 2, d^2 = -2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2}$ și $d = \pm i\sqrt{2}$ și se scriu cele patru soluții.

SUBIECTUL IV

a) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

b) $f'(x) = \cos^2 x - 2x \sin x \cos x$.

c) $f(x) + g(x) = x(\cos^2 x + \sin^2 x) = x, \forall x \in \mathbf{R}$.

d) $f(x) - g(x) = x(\cos^2 x - \sin^2 x) = x \cos(2x), \forall x \in \mathbf{R}$.

e) $A + B = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 g(x) dx \stackrel{c)}{=} \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$.

f) $A - B = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 g(x) dx \stackrel{d)}{=} \int_0^1 x \cos 2x dx = x \cdot \frac{\sin 2x}{2} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \sin 2x dx =$
 $= \frac{1}{2} \sin 2 + \frac{1}{4} \cos 2 - \frac{1}{4}$.

g) Deoarece $A + B = \frac{1}{2}$ și $A - B = \frac{1}{2} \sin 2 + \frac{1}{4} \cos 2 - \frac{1}{4}$ rezultă că:

$A = \frac{1}{8}(2 \sin 2 + \cos 2 + 1)$ și $B = \frac{1}{8}(3 - 2 \sin 2 - \cos 2)$.